И.Р.Ентинзон

Теория ошибок

(Лекции)

Киев – 2023

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. Введение…….3
2. Понятие вероятности…….6
3. Случайные величины……7
4. Числовые параметры……9
5. Нормальный закон распределения……11
6. Задачи математической статистики……...14
7. Понятие оценки……17
8. Оценки параметров закона распределения $\tilde{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_X^2$, $\tilde{\sigma}_X$ ..20
9. Центральная предельная теорема……..22
10. Задача 1. Найти оценку $\tilde{\bar{x}}$ при известной дисперсии σ_X^2 …….25
11. Задача 2. Найти оценку $\tilde{\sigma}_X^2$ при известном математическом ожидании $\bar{x}$……28
12. Задача 3. Найти оценки $\tilde{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_X^2$ при неизвестных $\bar{x}$ и σ_X^2 …….33
13. Метод доверительных интервалов……37
14. Задача 1. Доверительный интервал для оценки $\tilde{\bar{x}}$ математического ожидания $\bar{x}$ при известной дисперсии σ_X^2 нормальной случайной величины X ……..39
15. Задача 2. Доверительный интервал для оценки $\tilde{\sigma}_X^2$ дисперсии нормальной случайной величины X при известном математическом ожидании $\bar{x}$……42
16. Задача 3. Доверительные интервалы для оценок $\tilde{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_X^2$ нормальной случайной величины X при неизвестных $\bar{x}$ и σ_X^2 ……...48
17. Процедуры……..54
18. Численный пример…….58
19. Метод наименьших квадратов…..……62

20. Литература……...66
21. Приложение……67

1. ВВЕДЕНИЕ

Повторяющиеся измерения любой величины всегда приводят к различным числовым значениям. Предположим, что существует истинное значение измеряемой величины. Тогда будем называть ошибкой измерения ε разность результата измерения x и истинного значения измеряемой величины a, т.е. положим

$$\varepsilon = x - a \tag{1.1}$$

В зависимости от причин, вызывающих ошибки измерения, их делят на случайные, систематические и грубые (промахи). Под *случайными ошибками* понимают ошибки, значения которых меняются от одного измерения к другому. Величина этих ошибок не может быть установлена до опыта. Их возникновение вызвано неточностью измерения (случайными ошибками измерительных приборов, случайными ошибками экспериментатора, неточным соблюдением методики измерения) и непостоянством самой измеряемой величины.

Отличие *систематических ошибок* от случайных состоит в том, что их значение остается постоянным при проведении серии однотипных измерений, и, следовательно, они могут быть исключены из окончательного результата, если их величина определена путем предварительного исследования методики измерения.

Очевидно, деление ошибок на систематические и случайные носит условный характер, так как в одних случаях одни и те же ошибки следует рассматривать как случайные, а в других – как систематические. Например, серия измерений, проведенных при одинаковой температуре, будет содержать систематическую ошибку, появившуюся вследствие того, что не учитывается (или учитывается неправильно) температурная поправка. Однако в серии измерений, проведенных при различных (не зафиксированных) температурах, те же ошибки будут носить случайный характер. Аналогично неучтенная ошибка эталона (ошибки градуировки) для данной лаборатории будет носить систематический характер, однако

при обработке результатов, полученных в разных лабораториях, эта ошибка должна рассматриваться как случайная.

Грубые ошибки (промахи) являются также случайными, однако их характер существенно отличается от характера случайных ошибок измерения. Это отличие связано с тем, что если случайные ошибки измерения возникают при исправно работающей аппаратуре и правильных действиях экспериментатора, то причиной возникновения грубых ошибок является неисправность измерительной техники или ошибки в работе экспериментатора. Если грубые ошибки значительны, то результаты резко выделяются среди других результатов и их следует отбросить. Если это не так, то также результаты можно отбрасывать, но только после применения специальных количественных критериев.

Если измеряется величина, непосредственно интересующая экспериментатора, то измерения называются *прямыми*. Если определяемая величина вычисляется с помощью заданной функциональной зависимости по величинам, полученным путем прямых измерений, то такие измерения называются *косвенными.* В том случае, когда несколько измеряемых величин связано между собой известной функциональной зависимостью (например, три угла треугольника; температура, объем и давление газа и т.п.), вследствие ошибок измерений получаемые величины, как правило, будут противоречить друг другу. Такие измерения называются *условными.*

При прямых, косвенных и условных измерениях ошибки могут быть систематическими, случайными и грубыми.

Любой реальный измерительный прибор, работающий в реальных ситуациях подвержен, как и сама ситуация (установка) неконтролируемому влиянию многих внешних и внутренних факторов. Поэтому измеряемая величина может принимать различные числовые значения.

Статистики шутят по этому поводу, что измеряемая величина α представляет собой функцию от бесконечного числа параметров Φ_i

$$\alpha = \alpha(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_{40}, \ldots, \Phi_{400}, \ldots \Phi^{\infty}) \quad . \qquad (1.2)$$

Теоретически влияют ∞ число параметров, практически 400. Из них

40 параметров экспериментатор может, если он всесторонне обдумает ситуацию, назвать. И только 4 параметра экспериментатор в состоянии контролировать (фиксировать) и то, в пределах точности измерительного прибора.

В этой шутке заключена главная особенность любого измерения – количество факторов, влияющих на измеряемую величину, огромно; их влияние неконтролируемо, случайно. В связи с этим измеряемую величину следует рассматривать как величину случайную. Истинную величину из эксперимента, как видно, получить нельзя и, поэтому, в статистике понятие "истинная величина" отсутствует.

Однако, "нет худа без добра" - факт бесконечного (или огромного) количества влияющих параметров оказался решающим при выработке объективных принципов обсуждения результатов прямых измерений. Рассмотрению этих принципов посвящены настоящие лекции.

Будем называть случайной величиной такую величину, которая в результате опыта может принимать различные числовые значения. Случайная величина - это возможность появится числу на экране, а конкретное число на экране – это реализация случайной величины. Принимать случайная величина может либо дискретные значения, либо любые значения в заданном интервале, т.е. она может быть дискретной или непрерывной случайной величиной. Далее будем рассматривать только непрерывные случайные величины.

В теории ошибок основным объектом изучения являются случайные величины. Поэтому основным математическим аппаратом этой теории является теория вероятностей и вытекающая из нее математическая статистика.